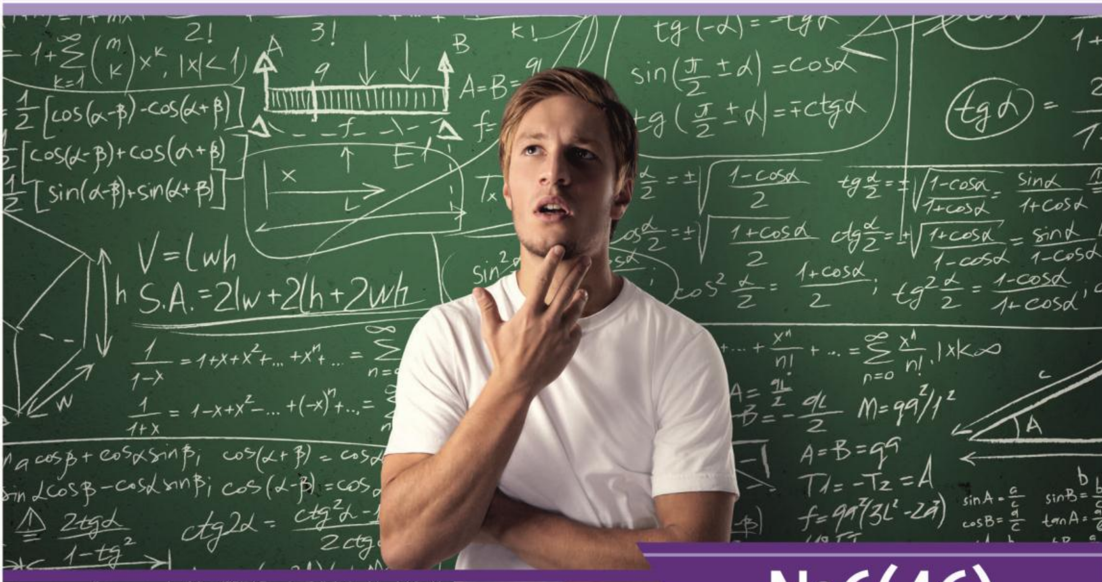
НАУЧНЫЙ ФОРУМ
nauchforum.ru

ISSN: 2541-8394



№6(46)

НАУЧНЫЙ ФОРУМ: ТЕХНИЧЕСКИЕ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

МОСКВА, 2021

НАУЧНЫЙ ФОРУМ:
ТЕХНИЧЕСКИЕ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Сборник статей по материалам XLVI международной научно-практической конференции

№ 6 (46)
Июль 2021 г.

Издается с декабря 2016 года

Москва
2021

УДК 51/53+62
ББК 22+3
Н34

Н34 Научный форум: Технические и физико-математические науки: сб. ст. по материалам XLVI междунар. науч.-практ. конф. – № 6 (46). – М.: Изд. «МЦНО», 2021. – 24 с.

ISSN 2541-8394

Статьи, принятые к публикации, размещаются на сайте научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU.

ББК 22+3

ISSN 2541-8394

Оглавление

Технические науки 4

Раздел 1. Технические науки 4

1.1. Транспорт 4

НОВОЕ О СТЕПЕНИ СЖАТИЯ В ПОРШНЕВЫХ ДВИГАТЕЛЯХ С ПОДВОДОМ ТЕПЛОТЫ ПРИ ПОСТОЯННОМ ОБЪЁМЕ 4
Кодиров Нодир

Физико-математические науки 12

Раздел 2. Математика 12

2.1. Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление 12

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫМИ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ 12
Сугак Дмитрий Владимирович

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВОГО ОГРАНИЧЕНИЯ 18
Сугак Дмитрий Владимирович

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

РАЗДЕЛ 1. ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

1.1. ТРАНСПОРТ

НОВОЕ О СТЕПЕНИ СЖАТИЯ В ПОРШНЕВЫХ ДВИГАТЕЛЯХ С ПОДВОДОМ ТЕПЛОТЫ ПРИ ПОСТОЯННОМ ОБЪЁМЕ

Кодиров Нодир

независимый исследователь,
Узбекистан

NEW ABOUT THE COMPRESSION RATIO IN PISTON ENGINES WITH HEAT INPUT AT A CONSTANT VOLUME

Nodir Kodirov

Independent research,
Uzbekistan

Аннотация. Вниманию научного сообщества предлагается переосмысленное понимание степени сжатия поршневых двигателей с подводом теплоты при постоянном объёме.

Abstract. The attention of the scientific community is offered a rethought understanding of the compression ratio of piston engines with heat input at a constant volume.

Ключевые слова: поршневой двигатель; подвод теплоты при постоянном объёме; степень сжатия.

Keywords: piston engine; heat input at a constant volume; compression ratio.

Из технической термодинамики известно, что термический КПД идеального цикла Отто, состоящего из двух адиабат и двух изохор, равен [1, с. 21]:

$$\eta t = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{(k-1)}} \tag{1}$$

где ε-степень сжатия,

$$\varepsilon = \frac{Va}{Vhc},$$

где Va- полный объём цилиндра,

$$Va = Vh + Vhc,$$

где Vh- рабочий объём цилиндра,

$$Vh = \frac{\pi \cdot D^2 \cdot S}{4},$$

где D-диаметр цилиндра, S-ход поршня, Vhc- объём камеры сгорания,

$$Vh = \frac{\pi \cdot D^2 \cdot hc}{4},$$

где hc-высота камеры сгорания [3, с. 62], k-показатель адиабаты.

«Обратимый адиабатный процесс можно осуществить в цилиндре с абсолютно нетеплопроводными стенками при бесконечном медленном перемещении поршня» [2, с. 85]. В идеальном цикле Отто расширение и сжатие рабочего тела совершаются по адиабате, в такте расширение, по определению, давление и температура рабочего тела снижаются, а в такте сжатие, напротив, давление и температура рабочего тела повышаются [2, с. 238]. В обоих этих тактах имеет место быть такое положение поршня, при котором текущее давление в цилиндре равно среднему давлению в такте, причем такой анализ выявил интересную неожиданность. В профильной научной литературе определение среднего давления в такте не рассматривается, однако его можно вывести на основании следующих уравнений:

$$L\text{ц} = Le - Lc \text{ и } pi = \frac{L\text{ц}}{Va - Vhc} \text{ [2, с. 240]},$$

где Lц- полезная работа цикла, Le-работа изменения объема в такте расширение, Lc- работа изменения объёма в такте сжатие, pi- среднее индикаторное давление. Преобразуем уравнение среднего индикаторного давления с учетом того, что $Va = Vh + Vhc$, откуда следует, что $Vh = Va - Vhc$:

$$pi = \frac{L\text{ц}}{Va - Vhc} = \frac{Le - Lc}{Vh} = \frac{Le}{Vh} - \frac{Lc}{Vh},$$

где выражение $\frac{Le}{Vh}$ есть среднее давление в такте расширение реср, т. е. реср $= \frac{Le}{Vh}$, а выражение $\frac{Lc}{Vh}$ есть среднее давление в такте сжатие рср, т.е. рср $= \frac{Lc}{Vh}$.

Такт расширение. Поршень движется от ВМТ к НМТ, давление снижается по закону:

$$pb = \frac{pz}{\varepsilon^k} = \frac{\Lambda \cdot pc}{\varepsilon^k} \text{ [2, с. 239]},$$

где pz- давление в начале такта, pb-давление в конце такта, ε-степень сжатия, k- показатель адиабаты, Λ- степень повышения давления, $\Lambda = \frac{pz}{pc}$ [2, с. 236], pc- давление в конце такта сжатие.

При достижении поршнем некоторого положения, текущее давление в цилиндре становится равным среднему давлению в такте:

$$pbcp = pecp$$

$$pbcp = \frac{pz}{\varepsilon^k ecp} = \frac{\Lambda \cdot pc}{\varepsilon^k ecp},$$

где εеср-степень сжатия при этом положении поршня.

Как показано выше, среднее давление в такте реср:

$$pecp = \frac{Le}{Vh}$$

Работа изменения объема:

$$Le = \frac{1}{k-1} \cdot (pz \cdot Vhc - pb \cdot Va) \text{ [2, с. 86]},$$

т. к. $pz = \Lambda \cdot pc$, то:

$$Le = \frac{1}{k-1} \cdot (pz \cdot Vhc - pb \cdot Va) = \frac{\Lambda \cdot pc \cdot Vhc}{(k-1)} \cdot \left(1 - \frac{pb \cdot Va}{pz \cdot Vhc}\right),$$

а т. к. $\frac{pb}{pz} = \left(\frac{Vhc}{Va}\right)^k = \frac{1}{\varepsilon^k}$ [2, с. 86],
и $\frac{Va}{Vhc} = \varepsilon$, то:

$$Le = \frac{\Lambda \cdot pc \cdot Vhc}{(k-1)} \cdot \left(1 - \varepsilon^{(1-k)}\right)$$

Среднее давление в такте реср:

$$pecp = \frac{Le}{Vh} = \frac{\frac{\Lambda \cdot pc \cdot Vhc}{(k-1)} \cdot \left(1 - \varepsilon^{(1-k)}\right)}{Vh},$$

так как $\frac{Vh}{Vhc} = \frac{Va - Vhc}{Vhc} = \frac{Va}{Vhc} - \frac{Vhc}{Vhc} = \varepsilon - 1$, то:

$$pecp = \frac{\Lambda \cdot pc}{(\varepsilon - 1) \cdot (k-1)} \cdot \left(1 - \varepsilon^{(1-k)}\right)$$

Приравниваем:

$$pbcp = pecp$$

откуда:

$$\frac{\Lambda \cdot pc}{\varepsilon^k ecp} = \frac{\Lambda \cdot pc}{(\varepsilon - 1) \cdot (k-1)} \cdot \left(1 - \varepsilon^{(1-k)}\right),$$

и:

$$\varepsilon^k ecp = \frac{(\varepsilon - 1) \cdot (k-1)}{\left(1 - \varepsilon^{(1-k)}\right)}$$

окончательно:

$$\varepsilon ecp = \sqrt[k]{\frac{(\varepsilon - 1) \cdot (k-1)}{\left(1 - \varepsilon^{(1-k)}\right)}} \quad (2)$$

Такт сжатие. Поршень движется от НМТ к ВМТ, давление повышается по закону:

$pc = pa \cdot \varepsilon^k$ [2, с. 238], где ра- давление в начале такта, рс-давление в конце такта, ε-степень сжатия, k- показатель адиабаты.

При достижении поршнем некоторого положения, текущее давление в цилиндре становится равным среднему давлению в такте:

$$pccp = pcp$$

$pccp = pa \cdot \varepsilon^k ccp$, где εсср-степень сжатия на этом угле ПКВ.

Среднее давление во всем такте рср:

$$pcp = \frac{Lc}{Vh}$$

Работа изменения объема:

$$Lc = \frac{1}{k-1} \cdot (pc \cdot Vhc - pa \cdot Va) \text{ [2, с. 86]},$$

$$Lc = \frac{1}{k-1} \cdot (pc \cdot Vhc - pa \cdot Va) = \frac{pc \cdot Vhc}{(k-1)} \cdot \left(1 - \frac{pa \cdot Va}{pc \cdot Vhc}\right),$$

а т. к. $\frac{pa}{pc} = \left(\frac{Vhc}{Va}\right)^k = \frac{1}{\varepsilon^k}$ [2, с. 86]
и $\frac{Va}{Vhc} = \varepsilon$, то:

$$Lc = \frac{pc \cdot Vhc}{(k-1)} \cdot \left(1 - \varepsilon^{(1-k)}\right)$$

Среднее давление в такте рсср:

$$pccp = \frac{Lc}{Vh} = \frac{\frac{pc \cdot Vhc}{(k-1)} \cdot \left(1 - \varepsilon^{(1-k)}\right)}{Vh},$$

так как $\frac{Vh}{Vhc} = \varepsilon - 1$, то:

$$pccp = \frac{pc}{(\varepsilon - 1) \cdot (k-1)} \cdot \left(1 - \varepsilon^{(1-k)}\right)$$

Приравниваем:

$$pccp = pcp$$

$$pa \cdot \varepsilon^k ccp = \frac{pc}{(\varepsilon - 1) \cdot (k - 1)} \cdot \left(1 - \varepsilon^{(1-k)}\right)$$

откуда:

$$\varepsilon^k ccp = \frac{pc}{pa \cdot (\varepsilon - 1) \cdot (k - 1)} \cdot \left(1 - \varepsilon^{(1-k)}\right)$$

Так как:

$$\frac{pc}{pa} = \left(\frac{Va}{Vhc}\right)^k = \varepsilon^k \text{ [2, с. 86]},$$

То:

$$\varepsilon^k ccp = \frac{\varepsilon^k}{(\varepsilon-1)\cdot(k-1)} \cdot \left(1 - \varepsilon^{(1-k)}\right),$$

$$\varepsilon ccp = \sqrt[k]{\frac{\varepsilon^k}{(\varepsilon - 1) \cdot (k - 1)} \cdot (1 - \varepsilon^{(1-k)})} = \varepsilon \cdot \sqrt[k]{\frac{1}{(\varepsilon - 1) \cdot (k - 1)} \cdot (1 - \varepsilon^{(1-k)})}$$

$$\varepsilon ccp = \varepsilon \cdot \sqrt[k]{\frac{\left(1-\varepsilon^{(1-k)}\right)}{(\varepsilon-1)\cdot(k-1)}} \tag{3}$$

Произведение степеней сжатия εеср и εсср:

$$\varepsilon ecp = \sqrt[k]{\frac{(\varepsilon-1)\cdot(k-1)}{\left(1-\varepsilon^{(1-k)}\right)}} \text{ и } \varepsilon ccp = \varepsilon \cdot \sqrt[k]{\frac{\left(1-\varepsilon^{(1-k)}\right)}{(\varepsilon-1)\cdot(k-1)}}$$

$$\varepsilon ecp \cdot \varepsilon ccp = \sqrt[k]{\frac{(\varepsilon - 1) \cdot (k - 1)}{(1 - \varepsilon^{(1-k)})}} \cdot \varepsilon \cdot \sqrt[k]{\frac{(1 - \varepsilon^{(1-k)})}{(\varepsilon - 1) \cdot (k - 1)}} = \varepsilon$$

$$\varepsilon ecp \cdot \varepsilon ccp = \varepsilon \tag{4}$$

Если посмотреть на примере [1, с. 167], то степень сжатия εеср при заявленной степени сжатия ε=8 [1, с. 168] и среднем показателе политропы расширения n_2=1,23 [1, с. 170] по уравнению (2):

$$\varepsilon ecp = \sqrt[n2]{\frac{(\varepsilon - 1) \cdot (n2 - 1)}{(1 - \varepsilon^{(1-n2)})}} = \sqrt[1{,}28]{\frac{(8 - 1) \cdot (1{,}23 - 1)}{(1 - 8^{(1-1{,}23)})}} = 3{,}233$$

а степень сжатия εсср при среднем показателе политропы сжатия n_1=1,37 [1, с. 169] по уравнению (3):

$$\varepsilon ccp = \varepsilon \cdot \sqrt[n1]{\frac{(1 - \varepsilon^{(1-n1)})}{(\varepsilon - 1) \cdot (n1 - 1)}} = 8 \cdot \sqrt[1{,}34]{\frac{(1 - 8^{(1-1{,}37)})}{(8 - 1) \cdot (1{,}37 - 1)}} = 2{,}536$$

Тогда произведение степеней сжатия εеср и εсср вместо равенства заявленной степени сжатия ε=8 в примере [1, с. 168] по уравнению (4) составит:

$$\varepsilon ecp \cdot \varepsilon ccp = 3{,}233 \cdot 2{,}536 = 8{,}2$$

В том же самом можно убедиться на примере [3, с. 171], где степень сжатия εеср при заявленной степени сжатия ε=8 [3, с. 170] и среднем показателе политропы расширения n_2=1,28 по уравнению (2):

$$\varepsilon ecp = \sqrt[n2]{\frac{(\varepsilon - 1) \cdot (n2 - 1)}{(1 - \varepsilon^{(1-n2)})}} = \sqrt[1{,}28]{\frac{(8 - 1) \cdot (1{,}28 - 1)}{(1 - \varepsilon^{(1-1{,}28)})}} = 3{,}205$$

а степень сжатия εсср при среднем показателе политропы сжатия n_1=1,34 по уравнению (3):

$$\varepsilon ccp = \varepsilon \cdot \sqrt[n1]{\frac{(1 - \varepsilon^{(1-n1)})}{(\varepsilon - 1) \cdot (n1 - 1)}} = 8 \cdot \sqrt[1{,}34]{\frac{(1 - 8^{(1-1{,}34)})}{(8 - 1) \cdot (1{,}34 - 1)}} = 2{,}523$$

Тогда произведение степеней сжатия εеср и εсср вместо равенства заявленной степени сжатия ε=8 в примере [3, с.170] по уравнению (4) составит:

$$\varepsilon ecp \cdot \varepsilon ccp = 3{,}205 \cdot 2{,}523 = 8{,}085$$

Объясняется это тем, что уравнение (4) справедливо только при $n_2=n_1$, что в не соответствует действительности, так как в реальных двигателях всегда $n_2<n_1$. Вероятно, будет небесполезно, если научное

сообщество обратит внимание на раскрытую в данной статье особенность степени сжатия в поршневых двигателях.

Список литературы:

1. Двигатели внутреннего сгорания [Текст]: учеб. для машиностроительных и политехнических вузов в 2 томах. Том 1: Рабочие процессы в двигателях и их агрегатах/А.С. Орлин, Д.Н. Вырубов, Г.Г. Калиш [и др]; под ред. А.С. Орлина.-Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Машгиз, 1957. – 396 с.
2. Нащокин В.В. Техническая термодинамика и теплопередача [Текст]: учеб. пособие для неэнергетических специальностей вузов/В.В.Нащокин.-М.: «Высшая школа», 1975. -496 с.
3. Ховах М.С. Автомобильные двигатели [Текст]/М.С. Ховах, Г.С. Маслов.-Изд. 2-е, перераб. и доп. -М.: «Машиностроение», 1971. -456 с.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

РАЗДЕЛ 2. МАТЕМАТИКА

2.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫМИ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Сугак Дмитрий Владимирович

канд. физ.-мат. наук, доцент,
Санкт-Петербургский государственный
университет гражданской авиации,
РФ, г. Санкт-Петербург

OPTIMAL CONTROL PROBLEMS FOR SINGULAR SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

Dmitry Sugak

Candidate of physical and mathematical sciences, assistant Professor, Saint Petersburg State University of Civil Aviation,
Russia, Saint Petersburg

Аннотация. Статья посвящена проблемам управления сингулярными распределенными системами [1]. В таких системах заданному управлению может не соответствовать единственное устойчивое состояние. А именно, данному управлению может вообще не соответствовать какое-либо состояние, либо таких состояний будет бесконечно много, либо состояние будет одно, но неустойчивое. Поэтому в таких задачах применение классической теории оптимального управления [2] оказывается либо очень затруднительным, либо вообще невозможным.

Abstract. The article is devoted to the problems of control of singular distributed systems [1]. In such systems, a given control may not correspond to a single stable state. Namely, this control may not correspond to any state at all, or there will be infinitely many such states, or there will be one state, but unstable. Therefore, in such problems the application of the classical theory of optimal control [2] turns out to be either very difficult or even impossible.

Ключевые слова: сингулярные системы; системы с распределенными параметрами.

Keywords: singular systems; distributed parameter systems.

1. Введение

Распределенные системы – это системы, описываемые уравнениями с частными производными [4] или интегро-дифференциальными уравнениями [3]. Иными словами, это системы, уравнение состояния которых есть уравнение с частными производными с граничными условиями или с начальными условиями, необходимыми для отыскания решения.

Сингулярные распределенные системы [1] или распределенные системы с особенностями – это системы, уравнение состояния которых, являющееся снова уравнением в частных производных или интегро-дифференциальным, представляет так называемые особенности, а именно: неустойчивость, явление разрыва, кратные решения и явления бифуркации.

Цель данной статьи – дать обзор основных классов задач оптимального управления сингулярными распределенными системами, возникающих в физических и инженерных приложениях.

2. Формулировка задачи оптимального управления сингулярной распределенной системой

Напомним общую схему задач управления распределенными системами, не сингулярными в данный момент. Изначально, как правило, задаётся уравнение состояния, записываемое символически в виде

$$A(y) = B(v) \tag{2.1}$$

Здесь A – оператор с частными производными или интегро-дифференциальный оператор, линейный или нелинейный, стационарный или нестационарный. К уравнению (2.1) необходимо добавить граничные условия, а если A – нестационарный оператор, то очевидно следует добавить и начальные условия. Эти разнообразные условия, которые следует уточнять для каждого из рассматриваемых классов операторов A, зависят от конкретной задачи и уравнения, описывающего поведение объекта управления.

Переменная v в уравнении (2.1) есть переменная управления. Нас будут интересовать ситуации, когда v является распределенной по области, в которой протекает физическое явление, моделируемое уравнением (2.1). Стоит отметить, что в теории управления распределенными системами обычно принимается весьма общее предположение:

(П1) Для переменной v, заданной в некотором множестве уравнение (2.1) имеет единственное решение $y(v)$.

Переменная y в уравнении (2.1) есть переменная состояния. Определенное, таким образом, решение $y(v)$ уравнения (2.1) определяет отображение

$$v \longrightarrow y(v) \tag{2.2}$$

Определив состояние $y(v)$, мы можем ввести функционал, который каждому v из множества управлений ставит в соответствие число $J(v)$, задаваемое равенством

$$J(v) \coloneqq \varphi\big(y(v)\big) + \psi(v) \tag{2.3}$$

Здесь функционалы φ и ψ определены соответственно на множестве состояний и на множестве управлений и принимают действительные значения. В большинстве приложений функционал ψ есть функция нормы управления v. Таким образом, он на самом деле определяет банахово [5] пространство U. Поэтому выбор пространства U управлений v определяется функционалом. Как только U фиксировано, становится известно, где изменяется $B(v)$ для $v \in U$, что в свою очередь дает возможность определить функциональные границы, в которых решается уравнение (2.1), и тем самым ввести банахово пространство Y, в котором отыскивается решение y. Предположение (П1) при этом уточняется следующим образом:

(П $1'$) для $v \in U$ уравнение (2.1) имеет единственное решение

$$y(v) \in Y. \tag{2.4}$$

Кроме того, в задачах управления распределенными системами обычно вводится еще два предположения:

(П2) отображение $v \longrightarrow y(v)$, $v \in U$, $y \in Y$ дифференциируемо.

(П3) функционалы $y \longrightarrow \varphi(y)$ и $v \longrightarrow \psi(v)$ – дифференцируемые отображения $Y \longrightarrow R$ и $U \longrightarrow R$.

Задача оптимального управления состоит в нахождении

$$\inf J(v) \tag{2.5}$$

когда v пробегает множество U или допустимое подмножество $U_{ad} \subset U$. Множество U_{ad} выражает ограничения на v. Случай, когда v пробегает всё пространство U, есть так называемый случай без ограничений. Будем далее предполагать ситуацию с ограничениями на управление

$$v \in U_{ad} \tag{2.6}$$

и на состояние

$$y(v) \in K \tag{2.7}$$

здесь K - заданное подмножество Y.

Прежде чем перейти к сингулярным ситуациям, в которых (П1) не имеет места, опишем всё ещё на формальном уровне структуру необходимых условий для задачи (2.5) при предположениях (П1) - (П3) и при допущении существования оптимального управления u.

Итак, пусть u - оптимальное управление и пусть $y(u) = y$ – соответствующее оптимальное состояние. Тогда существует тройка $\{u, y, p\}$, удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} A(y) = B(u) \\ A'(y)^* p = \varphi'(y) \\ (B'(u)^* p + \psi'(u), v - u) \geq 0 \ \forall u \in U_{ad} \end{cases} \tag{2.8}$$

Будем далее предполагать, что в исходной задаче нет ограничений на состояние. В (2.8) $A'(y)^*$ (соответственно $B'(u)^*$) означает оператор, сопряженный с производной оператора A (соответственно B) в точке y (соответственно u). При этом предполагается, что упомянутые производные существуют.

Согласно предположению (П1), сопряженное состояние p определяется единственным образом вторым уравнением в (2.8). В последнем неравенстве системы (2.8), которое может само по себе представлять систему вариационных неравенств [7], предполагается, что U_{ad} – выпукло. Во втором уравнении системы (2.8) обычно устанавливаются граничные условия и, если таковые имеются, начальные условия, которым удовлетворяет p. После уточнения всех функциональных пространств, в которых формулируется задача управления, ее решение сведется к применению формул Грина [4].

Однако, разнообразные физические и инженерные приложения неизбежно приводят к отказу от некоторых предположений, изложенных выше. Отметим, что именно в явлениях, в которых появляются свободные поверхности, таких как плавка стали и управление плазмой, предположение (П2) не выполняется.

Может также оказаться, что предположение (П3) не имеет места, то есть φ или ψ не дифференцируемы или даже функция $\varphi(y)$ не определена на пространстве, пробегаемом $y(v)$, когда v пробегает U. Такие ситуации очень часто имеют место в задачах точечного управления [1].

Если функция φ определена на пространстве Y_1, содержащемся строго в Y, то необходимо взять $v \in U_1$, где $U_1 = \{v | v \in U, y(v) \in Y_1\}$. Очевидно, что появляются и соответствующие ограничения на состояние. В этом случае $K = Y_1$ – есть векторное пространство, наделенное топологией, более слабой [6], чем топология, индуцируемая пространством Y. Примеры таких ситуаций изучались в работе [8].

В заключение отметим, что различные явления с кратными состояниями в химических реакциях, управление гибкими устойчивыми структурами, некоторые периодические по времени задачи, возникающие при переносе энергии приводят также и к отказу от предположения (П1). Таким образом, мы должны иметь возможность рассматривать ситуации, в которых уравнение (2.1) либо не имеет решения, либо имеет сколь угодно большое количество решений, либо решения (2.1) неустойчивы. И во всех этих случаях мы будем неизбежно сталкиваться с задачами управления сингулярными распределенными системами.

Список литературы:

1. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 С.

2. Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: ЛЕНАНД, 2019. – 64 С.

3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – 5-е издание. – М.: Наука, 1988. - 512 С.

4. Олейник О. А. Лекции об уравнениях с частными производными, - 3-е издание. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 260 С.
5. Матвеев А.С., Якубович В.А. Оптимальные системы управления: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи. СПб.: Изд-во С.-Петербургского Университета, 2003. – 540 С.
6. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. 359 С.
7. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 372 С.
8. Lions J. L. Some methods in the mathematical analysis of systems and their control. – Beijing: Science Press, 1981.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВОГО ОГРАНИЧЕНИЯ

Сугак Дмитрий Владимирович

канд. физ.-мат. наук, доцент,
Санкт-Петербургский государственный
университет гражданской авиации,
РФ, г. Санкт-Петербург

A NECESSARY CONDITION OF OPTIMALITY FOR A STATE-CONSTRAINED OPTIMAL CONTROL PROBLEM GOUVERNED BY A SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Dmitry Sugak

Candidate of physical and mathematical sciences,
assistant Professor,
Saint Petersburg State University of Civil Aviation,
Russia, Saint Petersburg

Аннотация. В статье рассмотрена задача оптимального управления объектом, описываемым системой дифференциальных уравнений в частных производных. Исследован случай так называемой сингулярной системы уравнений [3]. В такой системе заданному управлению может не соответствовать какое-либо состояние, либо таких состояний может быть бесконечно много. Сформулировано необходимое условие оптимальности в данной задаче - принцип максимума Понтрягина.

Abstract. The article deals with the problem of optimal control of an object described by a system of partial differential equations. The case of the so-called singular system of equations is investigated [3]. In such a system, any state may not correspond to a given control, or there may be an infinite number of such states. A necessary optimality condition in this problem is formulated - the Pontryagin's maximum principle.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных; принцип максимума Понтрягина.

Keywords: partial differential equation; Pontryagin's maximum principle.

1. Введение

В последнее время задачи управления системами дифференциальных уравнений в частных производных стали привлекать всё большее внимание специалистов [6],[7],[8]. Разработке специальных методов, применимых к исследованию задач управления такими системами, посвящены многочисленные работы [3],[4],[5]. Следует, однако, отметить, что в подавляющем большинстве упомянутых работ рассматривалась простейшая постановка задачи. Она характеризуется тем, что множество допустимых процессов, то есть процессов, среди которых ищется минимум некоторого функционала, описывается только дифференциальным уравнением и связанными с ним граничными условиями. В данной работе исследован более общий и сложный случай, когда в описании упомянутого множества присутствуют так называемые фазовые ограничения. Они требуют, чтобы фазовый вектор системы не покидал заданного множества. Это дополнительное требование существенно осложняет исследование задач оптимального управления. В статье на примере задачи оптимального управления эллиптической системой показано как используя принцип максимума Понтрягина [11], [12], [13], [14] подобные трудности можно преодолевать.

2. Задача оптимального управления объектом, описываемым системой уравнений эллиптического типа. Случай фазовых ограничений

Пусть Ω - открытое и ограниченное подмножество $\mathbb{R}^l$ с липшицевой границей Γ, $K \subset \mathbb{R}^m$ - непустое множество и $f: \Omega \times \mathbb{R}^h \times \overline{K} \to \mathbb{R}^h$. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} Ay = f[x, y(x), u(x)], u(x) \in K, x \in \Omega \\ y|_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

здесь $y(\cdot) = (y_{(k)}(\cdot))_{k=1}^h : \Omega \to \mathbb{R}^h$ $-$ состояние, $u(\cdot) -$ управление и $A -$ эллиптический дифференциальный оператор второго порядка [1]:

$$Ay(\cdot) = p(\cdot),$$

где $p(x) = |p_k(x)|_{k=1}^{h}$, $p_k(x) = -\sum_{i,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[a_{ij}^{(k)}(x)\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right]$ $\forall k = 1, \dots, h, a_{ij}^{(k)} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ и $\sum_{i,j=1}^{l} a_{ij}^{(k)} \xi_i \xi_j \geq \Lambda|\xi|^2\ \forall \xi \in \mathbb{R}^l, x \in \overline{\Omega}$, $k = 1, \dots, h$, при некотором $\Lambda > 0$.

Здесь $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), \alpha \in (0,1]$ - пространство всех непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций, удовлетворяющих условию Гёльдера: $\sup\limits_{x_1,x_2 \in \Omega} \frac{|u(x_1)-u(x_2)|}{|x_1-x_2|^{\alpha}} < \infty$. Рассматриваем управления $u(\cdot) \in L^{\infty}(\Omega \to K)$. Решения задачи (2.1) ищем в классе $H_0^1(\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^h)$. Напомним, что $H_0^1(\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^h)$ – замыкание пространства $C_0^{\infty}(\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^h) \coloneqq \{\varphi(\cdot) \in C^{\infty}(\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^h) : \varphi(x) = 0$ при $x \notin M$, где $M \subset int\, \Omega$ - некоторое компактное множество$\}$ в $H^1(\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^h) \coloneqq \{ \varphi(\cdot) \in L^2(\overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^h) \colon \frac{\partial \varphi(\cdot)}{\partial x_i} \in L^2(\overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^h), i = 1, \dots, l\}$. Норма в $H^1(\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^h)$ определена равенством $|\varphi(\cdot)|_{H^1}^2 \coloneqq |\varphi(\cdot)|_2^2 + \sum_{i=1}^{l} |\,\partial\varphi(\cdot)/\partial x_i\,|_2^2$. Предположим, что заданы функции $L : \Omega \times \mathbb{R}^h \times \overline{\mathrm{K}} \to \mathbb{R}$ и $g(\cdot) = |g_i(\cdot)|_{i=1}^{q} \colon \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}^q$. Рассмотрим задачу оптимального управления:

$$J(y,u) \colon= \int_{\Omega} L[x, y(x), u(x)]\, dx \to inf \qquad (2.2)$$

на множестве $D \coloneqq \{[y(\cdot), u(\cdot)] \colon y(\cdot) \in H_0^1(\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^h) \cap C^{0,\alpha}(\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^h), u(\cdot) \in L^{\infty}(\Omega \to \mathbb{R}^m)$, верно (2.1)и $g_i(x, y(x)) \leq 0\ \forall x \in \Omega, i = 1, \dots, q\}$

Считаем, что выполнены следующие предположения:

1. Для почти всех $x \in \Omega$ функция $L(x, y, u)$ непрерывна по (y, u) вместе с производной $\partial L/\partial y$. Для всех (y, u) функция $L(x, y, u)$ измерима по x и для любого $r > 0$ при некотором $\alpha_r(\cdot) \in L(\Omega \to \mathbb{R})$ справедлива оценка $|L(x, y, u)| + |\,\partial L(x, y, u)/\partial y\,| \leq \alpha_r(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ и всех $y, u \in \mathrm{K}$ с $|y| \leq r, |u| \leq r$.
2. Для почти всех $x \in \Omega$ функция $f(x, y, u)$ непрерывна по (y, u) вместе с производной $\partial f/\partial y$. Для любых (y, u) функция $f(x, y, u)$ измерима по x. Существует такое $s > l/(l-1)$, что для любого r при некотором $\beta_r(\cdot) \in L^s(\Omega \to \mathbb{R})$ справедлива оценка $|f(x, y, u)| + |\,\partial f(x, y, u)/\partial y\,| \leq \beta_r(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ и любых $y, u \in \mathrm{K}$ с $|y| \leq r, |u| \leq r$.
3. Функции $g_i(x, y)$ непрерывны по (x, y) вместе с производной $\partial g_i/\partial y$ и $g_i(x, 0) < 0\ \forall x \in \Gamma, i = 1, \dots, q$.

Обозначим через $M(\Omega)$ пространство всех вещественных регулярных борелевских зарядов в Ω. Его можно отождествить с двойственным к $C^0(\Omega)$ пространством [2], где $C^0(\Omega) = \{\varphi(\cdot) \in C(\Omega) : \varphi(x) = 0 \ \forall x \in \Gamma\}$. Символом $W_0^{1,\sigma}(\Omega \to \mathbb{R}^h), \sigma \in [1, \infty)$, обозначим замыкание пространства $C_0^\infty(\Omega \to \mathbb{R}^h)$ в $W^{1,\sigma}(\Omega \to \mathbb{R}^h) := \{ \varphi(\cdot) \in L^2(\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^h) : \frac{\partial \varphi(\cdot)}{\partial x_i} \in L^\sigma(\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^h), i = 1, \dots, l\}$. В $W_0^{1,\sigma}(\Omega \to \mathbb{R}^h)$ рассматривается норма $|\varphi(\cdot)| := (|\varphi(\cdot)|_2^2 + \sum_{i=1}^l |\,\partial\varphi(\cdot)/\partial x_i\,|_\sigma^\sigma)^{1/\sigma}$.

Теорема 2.1

Пусть выполнены предположения 1-3 и (y^0, u^0) – оптимальный процесс в задаче (2.2). Тогда существует функция $\psi(\cdot) \in W_0^{1,\sigma}(\Omega \to \mathbb{R}^h)$, где $\sigma < l/(l-1)$, заряды $\mu_i(dx) \in M(\Omega), i = 1, \dots, q$ и число $\lambda^0 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$A^*\psi(x) - \nabla_y \mathrm{H}[\mathrm{x}, y^0(x), u^0(x)] + \sum_{i=1}^q \mu_i(dx) \nabla_y g_i[\mathrm{x}, y^0(x)] = 0, x \in \Omega \tag{2.3}$$

$$\mathrm{H}[\mathrm{x}, y^0(x), u^0(x)] = \max_{v \in K} \mathrm{H}[\mathrm{x}, y^0(x), \mathrm{v}] \text{ для почти всех } x \in \Omega. \tag{2.4}$$

$$\lambda^0 \geq 0, \mu_i(dx) \geq 0, supp\ \mu_i(dx) \subset \{x : g_i[\mathrm{x}, y^0(x)] = 0\} \ \forall i = 1, \dots, q. \tag{2.5}$$

$$\lambda^0 + \int_\Omega |\,\psi(x)|\,dx + \sum_{i=1}^q \mu_i(\Omega) > 0 \tag{2.6}$$

Здесь $\mathrm{H}[\mathrm{x}, \mathrm{y}, u] = \psi^*(x) f(x, y, u) - \lambda^0 L(x, y, u)$ – функция Гамильтона и $A^*\psi(x) = p(x)$, где $p(x) = |p_k(x)|_{k=1}^h$,

$$p_k(x) = -\sum_{i,j=1}^l \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}^{(k)}(x) \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j}\right] \ \forall k = 1, \dots, h.$$

В равенстве (2.3) все слагаемые трактуются как обобщенные функции [9],[10]. Оно представляет собой уравнение эллиптического типа второго порядка относительно $\psi(\cdot)$. Включение $\psi(x) \in W_0^{1,\sigma}(\Omega \to \mathbb{R}^h)$ подразумевает выполнение однородного граничного условия Дирихле $\psi|_\Gamma = 0$. Уравнение вида (2.3) с мерами $\mu_i(dx)$ было изучено в [2]. В силу (2.1) $y^0|_\Gamma = 0$, откуда согласно предположению 3 $g_i[x, y^0(x)] < 0 \ \forall x \in \Gamma, i = 1, \dots, q$. Поэтому в соответствии с включением из (2.5) $supp\ \mu_i(dx) \subset int\,\Omega \ \forall i = 1, \dots, q$.

Список литературы:

1. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., 1973. 576 С.
2. Bonnans J.F., Casas E. An Extension of Pontryagin's principle for state-constrained control of semilinear elliptic equations and variational inequalities // SIAM J. Control and Optim. 1995. Vol. 33. P. 274 – 298.
3. Лионс Ж.Л. Управление сингулярными распределенными системами. М., 1987. 368 С.
4. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., Наука, 1977. 624 С.
5. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Теория принципа максимума. Черноголовка: ОИХФ, 1979. 35 С.
6. Fenglin Huang, Yanping Chen, Yunqing Huang A priori error estimates of a meshless method for optimal control problems of stochastic elliptic PDEs // International Journal of Computer Mathematics 2019. Vol. 96. P. 1048 – 1065.
7. Hongbo Guan, Dongyang Shi Superconvergence analysis of a nonconforming finite element method for monotone semilinear elliptic optimal control problems // Numerical methods for partial differential equations 2020. Vol. 36. P. 1405 – 1417.
8. Francisco Fuica, Enrique Otarola, Abner J. Salgado An a posteriori error analysis of an elliptic optimal control problem in measure space // Computers & Mathematics with Applications 2019. Vol. 77. P. 2659 – 2675.
9. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – 5-е издание. – М.: Наука, 1988. - 512 С.
10. Олейник О. А. Лекции об уравнениях с частными производными, - 3-е издание. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 260 С.
11. Матвеев А.С., Якубович В.А. Абстрактная теория оптимального управления. СПб.: Изд-во С.-Петербургского Университета, 1994. – 364 С.
12. Матвеев А.С., Якубович В.А. Оптимальные системы управления: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи. СПб.: Изд-во С.-Петербургского Университета, 2003. – 540 С.
13. Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: ЛЕНАНД, 2019. – 64 С.
14. Матвеев А.С. Введение в математическую теорию оптимального управления: Учебник. - СПб.: Изд-во С.-Петербургского Университета, 2018. – 194 С.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

НАУЧНЫЙ ФОРУМ:
ТЕХНИЧЕСКИЕ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Сборник статей по материалам XLVI международной научно-практической конференции

№ 6 (46)
Июль 2021 г.

В авторской редакции

Подписано в печать 05.07.21. Формат бумаги 60х84/16.
Бумага офсет №1. Гарнитура Times. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 1,5. Тираж 550 экз.

Издательство «МЦНО»
123098, г. Москва, ул. Маршала Василевского, дом 5, корпус 1, к. 74
E-mail: tech@nauchforum.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного оригинал-макета в типографии «Allprint»
630004, г. Новосибирск, Вокзальная магистраль, 3

16+