



НАУЧНЫЙ
ФОРУМ
nauchforum.ru

ISSN: 2541-8394

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0$$

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-\frac{r}{a}}$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}$$

$$1 = \int_0^\infty |\psi|^2 dV = \int_0^\infty C^2 e^{-\frac{2r}{a}} r^2 dr$$

$$E_n = -\frac{1}{\hbar^2} \frac{Z^2 m e^4}{8 \epsilon_0^2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$dW = |\psi|^2 dV = |\psi|^2 4\pi r^2 dr$$

№3(32)

**НАУЧНЫЙ ФОРУМ:
ТЕХНИЧЕСКИЕ И ФИЗИКО-
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ**

МОСКВА, 2020



НАУЧНЫЙ ФОРУМ: ТЕХНИЧЕСКИЕ И ФИЗИКО- МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

*Сборник статей по материалам XXXII международной
научно-практической конференции*

№ 3 (32)
Апрель 2020 г.

Издается с декабря 2016 года

Москва
2020

УДК 51/53+62

ББК 22+3

НЗ4

Председатель редколлегии:

Лебедева Надежда Анатольевна – доктор философии в области культурологии, профессор философии Международной кадровой академии, г. Киев, член Евразийской Академии Телевидения и Радио.

Редакционная коллегия:

Ахмеднабиев Расул Магомедович – канд. техн. наук, доц. кафедры строительных материалов Полтавского инженерно-строительного института, Украина, г. Полтава;

Данилов Олег Сергеевич – канд. техн. наук, научный сотрудник Дальневосточного федерального университета;

Маршалов Олег Викторович – канд. техн. наук, начальник учебного отдела филиала ФГАОУ ВО "Южно-Уральский государственный университет" (НИУ), Россия, г. Златоуст.

НЗ4 Научный форум: Технические и физико-математические науки: сб. ст. по материалам XXXII междунар. науч.-практ. конф. – № 3(32). – М.: Изд. «МЦНО», 2020. – 26 с.

ISSN 2541-8394

Статьи, принятые к публикации, размещаются на сайте научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU.

ББК 22+3

ISSN 2541-8394

© «МЦНО», 2020

Оглавление

Раздел 1. Технические науки	4
1.1. Информатика, вычислительная техника и управление	4
ПРИМЕНЕНИЕ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ В ЗАДАЧАХ ЭФФЕКТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОНДИЦИОНИРОВАНИЕМ Алхатем Али	4
1.2. Радиотехника и связь	8
ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРОВ В ОПТИЧЕСКОЙ АТМОСФЕРНОЙ СИСТЕМЕ СВЯЗИ С ПОДВИЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ Кузяков Борис Алексеевич	8
Физико-математические науки	15
Раздел 2. Математика	15
2.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ	15
ОБ ОЦЕНКАХ ДЕМПФИРОВАННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ Муранов Шахриддин Абдуллаевич	15
Раздел 3. Физика	20
3.1. Теоретическая физика	20
УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ БЛОХА Ахмедов Баходир Бахромович Розиков Джурабек Юлдошбой углы Зокиров Адхам Илхомжон углы Рузибоев Валижон Умарали углы	20

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

РАЗДЕЛ 1.

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

1.1. ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ В ЗАДАЧАХ ЭФФЕКТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОНДИЦИОНИРОВАНИЕМ

Алхатем Али

аспирант,

Российский Университет Дружбы Народов,

РФ, г. Москва

Нечеткая логика – это прогрессивная методология решения проблем с большим количеством дополнительных условий для внутреннего управления и обработки информации. Нечеткая логика располагает возможностью сделать доступные выводы из неполной информации. С некоторой точки зрения, нечеткая логика напоминает принятие решений человеком благодаря своей способности разбираться с приблизительной информацией и находить точные решения.

Нечеткая логика - это расширение точной логики, которая была предложена для обработки утверждения частичных значений истина-истина между «полностью истинным» и «полностью ложным». Доктор Лотфи Заде представил его в 1960-х годах. Согласно его исследованиям, необходимо рассматривать нечеткую теорию как единую, поэтому процесс «нечеткой теории» выступает как методология, позволяющая обобщить любую конкретную теорию от четкой до непрерывной нечеткой формы. Другими словами, нечеткая логика является расширением классической двужначной логики с помощью набора истинности.

Использование нечетких правил важно, когда причинная связь между доменами неизвестна. Обычно неполная информация об отношениях между этими доменами существуют в форме нечеткого регулирования. Оно определяет взаимосвязь нечетких переменных – впускной и выходной. Правило содержит в себе две составляющие: первоначальную и последующую.

Основные входные данные, которые обязательно иметь в виду при проектировании системы кондиционирования воздух офисного здания:

1. Информация о погодных условиях;
2. Показатели занятости и установки;
3. Требования к комфорту: заданные значения температуры воздуха, температуры и влажности;
4. Стратегии контроля: обратная связь по температуре в помещении и относительной влажности, прямая связь на графиках занятости и календаре;
5. Общие характеристики защитных конструкций здания;
6. Размеры основных компонентов системы кондиционирования воздуха офисного здания.

Свойственное данному процессу правило, которое описывает эту типичную теорию (о нечетких переменных) выглядит следующим образом:

$$\text{ЕСЛИ } X - \text{это } A, \text{ а } Y - \text{это } B, \text{ тогда } Z - \text{это } C \quad (1)$$

В приведенном выше нечетком правиле X , Y и Z называются нечеткими переменными, а A , B и C - лингвистическими значениями, оператор AND - нечетким связным. Он агрегирует результаты в пределах исходной части. Другими общими связями являются объединение ИЛИ и дополнение НЕ.

Далее необходимо сформулировать математическую модель, которая описывает термодинамический характер системы кондиционирования воздуха, а также рассмотреть основные уравнения, которые относятся к давлению, а также к общей форме модели TSK.

Атмосферное давление изменяется в зависимости от высоты над уровнем моря в следующем виде:

$$P = a + bH \quad (2),$$

где: a и b – константы, приведенные в таблице 1., а H – высота над уровнем моря в метрах.

Таблица 1.

Параметры а и в, используемые в отношении давления-высота

Константы	$H \leq 1200$ метров	$H > 1200$ метров
а (кПа)	101,325	99,436
В (кПа/м)	-0,01153	-0,010

Для определения примерной скорости теплопередачи и массового расхода жидкости (в данном случае воды) при любых значениях давления, температуры и относительной влажности воздуха при расчетах для систем кондиционирования воздуха пользуются специальными компьютерными программами. Для решения системы связанных нелинейных алгебраических уравнений используется числовой код (это необходимо для оценки теплопередачи и массового расхода воды, которые должны быть добавлены или удалены из системы кондиционирования воздуха, чтобы подавать поступающий воздух известным набором термодинамических свойств к другому набору известных свойств).

На входе или выходе системы кондиционирования достаточно знать три параметра, обычно температуру сухой колбы, относительную влажность и общее давление. Все остальные свойства, а также потоки тепла и массы воды будут оцениваться с использованием обозначенного ранее основного уравнения. Модель выводов будет строиться на выводах Такаги-Сугено-Канга (TSK). Такая модель обладает вычислительной эффективностью, хорошо сочетается с линейными методами, корректно взаимодействует с оптимизацией и адаптивными методами, гарантирует непрерывность выходной поверхности и лучше подходит для математического анализа. Кроме того, Такаги-Сугено-Канга (для краткости TS) использует линейные функции входных переменных.

В этой модели функция заключения определяется нечетким, но точечным образом. Благодаря этому дефазификатор на выходе системы не требуется, а модель вывода значительно упрощается. Общая форма модели TSK может быть представлена в следующем виде:

$$\text{если } x_1 - \text{это } A_1 I x_2 \text{ это } A_2 I \dots I x_N, \text{ это } - \text{это } A_N, \text{ то } y = f(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (3),$$

В векторной записи ее можно записать еще проще:

$$\text{если } x - \text{это } A, \text{ то } y = f(x) \quad (4),$$

где: $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ - четкая функция. Заключение, представляется в форме функциональной зависимости, чаще всего – в виде

полиномиальной функции нескольких переменных. Классическое представление этой функции, чаще всего используемое на практике, - это полином первого порядка:

$$y = f(x) = P_0 + \sum_{i=1}^N p_i x_i \quad (5),$$

где: коэффициенты p ($p_1, p_2, \dots, p_N$) - это цифровые веса, подбираемые в процессе обучения.

Таким образом, критерий оптимальности, представленный в уравнении 5 может быть сформулирован как нахождение средневзвешенного функционала качества.

Существуют также модели нечеткого вывода Ларсена и Цукамото. Отличие всех моделей нечеткого вывода друг от друга заключается в различном наборе нечетких правил, логических операций, а также способа дефаззификации. Данные модели являются универсальными аппроксиматорами.

Однако при больших объемах входной информации наибольшая точность в установлении нелинейных связей достигается при использовании модели нечеткого логического вывода Такаги-Сугено-Канга. При этом наиболее эффективно механизм нечеткой логики используется в гибридных или адаптивных системах, к которым как раз и можно отнести системы кондиционирования и вентиляции воздуха.

Список литературы:

1. Дубынин Н.В. Архитектурно-строительные термины // Жилищное строительство. 2007.
2. Кирюха В.В., Мазур Н.Ф. Оптимизация температурных параметров воздушной среды производственных помещений большой площади // Приморские зори: Сб. Владивосток: ТАНЭБ, 2003.
3. Кокорин В.Д. Кондиционирование воздуха — что это такое? // АВОК. 2004. №1. С. 58-60.
4. Кокорин О.Я. Современные системы кондиционирования воздуха. — М.: Изд-во физ. мат. лит-ры, 2003.

1.2. РАДИОТЕХНИКА И СВЯЗЬ

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРОВ В ОПТИЧЕСКОЙ АТМОСФЕРНОЙ СИСТЕМЕ СВЯЗИ С ПОДВИЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Кузяков Борис Алексеевич

канд. физ. – мат. наук, доцент,
Российский Технологический Университет МИРЭА,
РФ, г. Москва

FEATURES OF USING QUADROCOPTERS IN THE OPTICAL ATMOSPHERIC COMMUNICATION SYSTEM WITH MOBILE OBJECTS

Boris Kuzyakov

Candidate of physical and mathematical Sciences,
Associate Professor, Russian Technological University MIREA,
Russia, Moscow

Аннотация. В наше время, квадрокоптеры широко применяются во многих сферах науки и техники, включая системы связи. Рассмотрены варианты «активной» и «пассивной» ретрансляции с применением квадрокоптеров. Приведены параметры ряда серийных квадрокоптеров. Показаны преимущества «пассивной» ретрансляции. Рассмотрены вопросы необходимой конфиденциальной связи между автомобилями в колоннах и схемы повышения её надежности. В одной из них, использована современная система позиционирования на базе видеокамеры. Приведен вариант системы обработки видеоинформации.

Abstract. Nowadays, quadrocopters are widely used in many fields of science and technology, including communication systems. Variants of "active" and "passive" retransmission using quadrocopters are considered. The parameters of a number of serial quadrocopters are given. The advantages of "passive" retransmission are shown. The issues of necessary confidential communication between cars in columns and schemes for improving its reliability are considered. One of them uses a modern positioning system based on a video camera. A variant of the video information processing system is presented.

Ключевые слова: оптическая связь; ретрансляция сигналов; колонны автомобилей; квадрокоптер; лазер; флуктуации; отражатель зеркального типа; система позиционирования; обработка видеoinформации.

Keyword: optical communication; signal retransmission; vehicle columns; quadrocopter; laser; fluctuations; mirror-type reflector; positioning system; video information processing.

В оптических атмосферных системах связи перспективны варианты ретрансляции сигналов [3, с. 150] с применением квадрокоптеров. При размещении приемо-передающих модулей на квадрокоптере, систему часто называют «активной». При размещении на квадрокоптере отражателя, например, зеркального типа [4, с. 34], система считается «пассивной». На рис. 1 показан общий вид грузового квадрокоптера (ГКР), среднего класса, у него имеется специальный грузовой держатель и 8 пропеллеров.



Рисунок 1. Общий вид ГКР

В варианте «активной» ретрансляции с размещением 1 передатчика и 1 приемника системы АОЛС на коптере, суммарный вес аппаратуры ретрансляции, на базе модулей «БОКС», оказывается, как минимум, ~ 20 кг. В наше время, в парке предлагаемых квадрокоптеров, имеются модели с требуемыми параметрами, часть из них приведена в Таблице 1.

Таблица 1.

Параметры моделей ГРП

Пп.	Модель	Максим. груз, кг	Стоимость*
1	MATRICE 600 PRO	6	300 т.р.
2	SteadDroneQU4DX	8	460 т.р.
3	Freefly ALTA 8	12,5	700 т.р.
4	Versadrones Heavy	12,5	800 т.р.
5	Airborg H8 10K	15	1400 т.р.
6	Aerones drone	100	≥ 5000 т.р.
7	DJI MPP	0,2	6 т.р.
8	SYMA	0,1	3,5 т.р.

* Стоимости приведены ориентировочные, т.к. получены на основе анализа информации СМИ по договорным ценам на ГКР, которые выпускаются малыми сериями и в разных модификациях.

Данные, приведенные в таблице, показывают, что стоимость ГКР, существенно выше, чем «легких» коптеров (см. пп. 7, 8) и в сильной мере зависит от грузоподъемности. На некоторые модели цены, вообще, не указываются и все уточняется при конкретном заказе на покупку выбранного ГКР. Большинство видов ГКР – мультикоптеры, используются конструкции с 6-ю, 8-ю и более пропеллерами. Некоторые из них снабжены специальными держателями и/или съемными захватами грузов. Имеющаяся информация в СМИ и данные Таблицы, показывают, что ГКР с максимальной грузоподъемностью 15 кг, реализованы несколькими фирмами и имеются на рынке. Однако, оценка массы «активного» ретранслятора, с использованием модулей «БОКС», несколько превышает эту величину и, следовательно, и его стоимость.

В «пассивной» системе, с зеркальными отражателями (рис. 2) на коптере, вес полезной нагрузки существенно снижается и могут использоваться коптеры «легкого» типа. При этом, стоимость системы снижается более, чем на 2 порядка, что подтверждает её преимущества. Варианты зеркальных отражателей показаны на рис. 2.

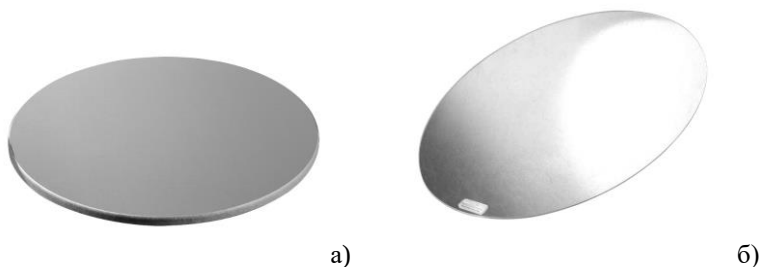


Рисунок 2. Варианты зеркальных отражателей: а) плоский круглый отражатель; б) плоский эллиптический отражатель

При использовании зеркал с металлическим напылением [6, с. 211], коэффициент отражения может быть выше 97 %, а при использовании многослойных диэлектрических зеркал, коэффициент отражения может превышать 99% [1, с. 126].

При движении автомобилей в колоннах, как гражданских, так и военных, между ними необходима конфиденциальная связь. Система АОЛС с ретрансляцией сигналов с помощью квадрокоптера, в условиях сильно пересеченной местности, приведена на рис. 3.

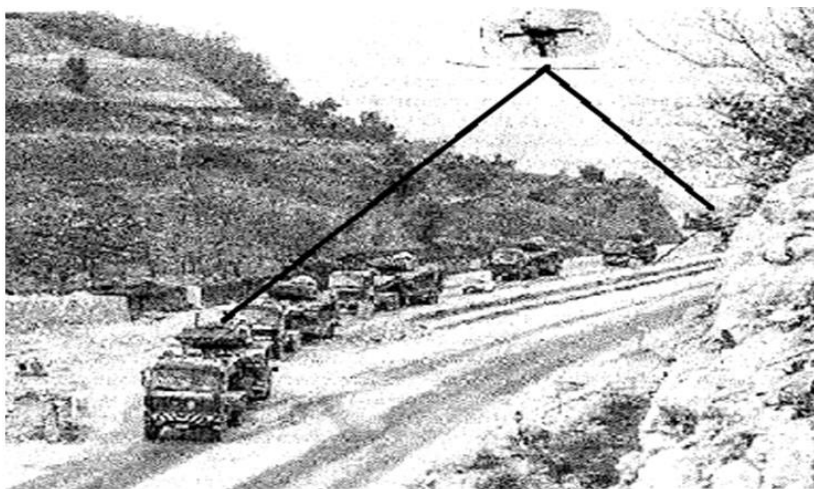


Рисунок 3. Система АОЛС с ретрансляцией сигналов с помощью квадрокоптера

На рис. 3 видно, что условие «прямой видимости» между выделенными автомашинами, не выполняется. Для реализации высокоскоростной связи, на помощь приходит ретрансляция с использованием квадрокоптера. Проведенные экспериментальные исследования, показали, что наименьшие флуктуации угла наклона лазерного излучения, с отражателем зеркального типа, могут быть реализованы на «легком» квадрокоптере DJI Mavic Pro Platinum. Нужно отметить, что на трассах протяженностью $\sim 60 - 80$ м, диаметр лазерного излучения в системах АОЛС, в плоскости приемника, как правило, не превышает $30 - 40$ см. Несмотря на относительно малую расходимость лазерного излучения, высокоскоростная связь в колонне, может быть реализована за счет установки приёмников излучения, например, на крышу кабины каждого автомобиля. При этом, расстояние между автомашинами в схеме: передатчик – приемник, можно определить несколькими способами. 1) Использование видеокамеры на самом квадрокоптере. На крыше каждого авто наносят его порядковый номер в колонне. В колоннах обычных авто, как правило, жестко поддерживают дистанцию между машинами, например, $10 - 12$ м, не говоря о военных колоннах. Длина каждого авто в колонне, так же известна с точностью до единиц см. Тогда расстояние между, например, авто №2 и авто №28, с использованием информации от камеры коптера, и зная его высоту над колонной, находится из простых геометрических формул. 2) Для повышения надежности связи могут быть использованы, недавно разработанные [5, с. 3], современные системы позиционирования с использованием видеокамеры [2, с. 4436] и габаритных огней автомашины (рис. 4).

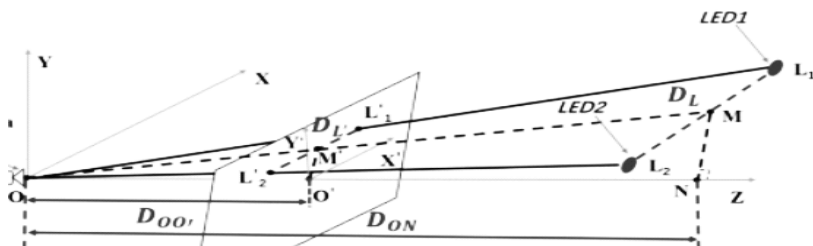


Рисунок 4. Система позиционирования с использованием видеокамеры на тестовой автомашине (слева, в середине) и габаритных огней автомашины – экрана (справа, в 2-х плоскостях, на 2-х расстояниях)

Габаритные огни автомашины, расстояние до которой измеряется, обозначены (L_1, L_2) - на расстоянии $D_{OO'}$ и (L_1, L_2) - на расстоянии D_{ON} ,

соответственно, от центра камеры на тестовой автомашине. Расстояние D_{ON} вычисляется из геометрических соотношений [7, с. 735]. При этом, разница в длинах между задними габаритными огнями автомашины - экрана - D_L , D_L , на соответствующих расстояниях, определяется в пикселях видеокамеры с высокой точностью [8, с. 4523]. Вариант схемы [9, с. 27] обработки изображений видеокамеры, используемой в измерительной системе рис. 4, показан на рис. 5.

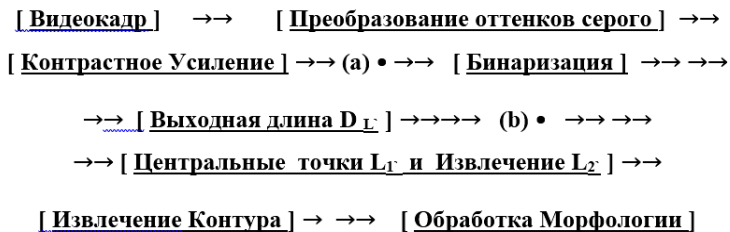


Рисунок 5. Вариант схемы обработки изображений

Здесь, обозначения выходной длины и базовые точки [10, с. 959] соответствуют их обозначениям на рис. 4.

Краткие выводы. 1) Малые изменения углов наклона лазерного излучения в открытом пространстве и в помещении, при использовании лазерного излучателя и зеркального ретранслятора, носят случайный характер. 2) Для реализации высокоскоростной конфиденциальной связи в колоннах автомашин применима ретрансляция в «пассивных» и «активных» системах, с использованием квадрокоптеров, с совершенной стабилизацией.

Список литературы:

1. Головашкин А.И. Металлооптика. – в кн. Физический Энциклопедический Словарь. – М. 1963. т. 3; [www. booksite.ru](http://www.booksite.ru).
2. He J., Tang K., He J., Shi J. Effective vehicle-to-vehicle positioning method using monocular camera based on VLC. Optics Express. – 2020. Vol.28. No. 4. p. 4433- 4443.
3. Кузяков Б.А. Метод ретрансляции сигналов оптического диапазона в атмосферной линии связи с использованием квадрокоптера. Сб. трудов. VII Международная конференция «Фотоника и информационная оптика». – М. 2018. МИФИ. с. 350-351.
4. Кузяков Б.А. Схема ретрансляции сигналов оптического диапазона в атмосферной линии связи с использованием квадрокоптера. Материалы международной научно – практической конференции «Наука сегодня: теория и практика». - г. Вологда. 2017. с. 34-35.

5. Liu S., Li Z., Zhang Y., and Cheng X. Introduction of key problems in long-distance learning and training. – 2019. Mobile Netw. Appl. 24(1). P. 1–4.
6. Матулевич Г.П. Оптические свойства поливалентных переходных металлов. –Успехи Физических Наук. – 1969. т. 97. в.2. с. 211.
7. Song S., Mandraker M. and Guest C.C. Accuracy Monocular SFM and Scale Correction for Autonomous Driving. – 2016. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 38(4). P. 730–743.
8. Tram V.T.B. and Yoo M. Vehicle-to-vehicle distance estimation using a low-resolution camera based on visible light communications. – 2018. IEEE Access 6. P. 4521–4527.
9. Wang J, Zou F., Zhang M. and Li Y. A monocular ranging algorithm for detecting illegal vehicle jumping. - 2017. International Conference on Green Informatics. p. 25–29.
10. Xue J., Xu S. and Wang S. Research of vehicle monocular measurement system based on computer vision. - 2013. Proceedings of the 2013 International Conference on Machine Learning and Cybernetics. p. 957–961.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

РАЗДЕЛ 2.

МАТЕМАТИКА

2.1. ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

ОБ ОЦЕНКАХ ДЕМПФИРОВАННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Муранов Шахриддин Абдуллаевич

докторант,

Самаркандский государственный университет,

Республика Узбекистан, г. Самарканд

ON ESTIMATES FOR THE DAMPED OSCILLATORY INTEGRALS

Shahriddin Muranov

doctoral student

Samarkand State University,

Uzbekistan, Samarkand

Аннотация. В данной работе рассматриваются оценки преобразования Фурье мер, сосредоточенных на аналитических гиперповерхностях, содержащих множитель гашения. В статье рассматривается задача С.Д. Согги и И.М. Стейна об оптимальном убывании преобразования Фурье мер с множителем гашения для произвольных аналитических поверхностей трехмерного Евклидова пространства.

Abstract. In this paper we consider estimates of the Fourier transform measures, concentrated on analytic hypersurfaces containing the of damping factor. The paper presents the solution of the problem S.D.Soggi and I.M. Stein about the optimal decay of the transformation Fourier measures with a damping factor for any analytic surfaces in three-dimensional Euclidean space.

Ключевые слова: осцилляторные интегралы; преобразование Фурье; множитель гашения; максимальный оператор.

Keywords: oscillatory integrals; Fourier transform; damping factor; maximal operator.

Введение

В связи с проблемой об ограничении максимальных операторов, ассоциированных с гиперповерхностью $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$, С.Д. Согги и И.М. Стейном [1] введены следующие демпфированные осцилляторные интегралы:

$$\hat{\mu}_q(\xi) = \int_S e^{i(\xi, x)} |K(x)|^q \psi(x) d\sigma(x) \quad (1)$$

где: $K(x)$ — гауссова кривизна гиперповерхности в точке $x \in S$, $\psi \in C_0^\infty(S)$ — неотрицательная гладкая функция с компактным носителем, (x, ξ) скалярное произведение векторов x и ξ , $d\sigma(x)$ — поверхностная мера. Они доказали, что если $q \geq 2n$, то интеграл (1) убывает в порядке $O(|\xi|^{-\frac{n}{2}})$ (при $|\xi| \rightarrow +\infty$), т. е. убывает оптимально.

Постановка задачи

Пусть $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — гладкая гиперповерхность. Найти минимальное значение q такое, что справедлива следующая оценка:

$$\left| \int_S e^{i(x, \xi)} |K(x)|^q \psi(x) d\sigma(x) \right| \leq qA |\xi|^{-\frac{n}{2}}$$

Эта задача была поставлена в работе [1] Согги и Стейна. Частичное решение аналогичной задачи приведено в работе [6] для выпуклых гиперповерхностей конечного линейного типа. Точнее, доказано, что при $0 \leq \psi(x) \leq K(x)^{\frac{1}{2}}$ и $\psi \in C_0^\infty(S)$, преобразование Фурье соответствующей меры, т. е. интеграл (1), убывает оптимально. Решение этой задачи в одномерном случае, точнее когда S кривая, заданная полиномом, вытекает из результатов Д.М. Оберлина [2].

В данной работе мы представим решение задачи С.Д. Согги и И.М. Стейна для частного класса аналитических поверхностей трехмерного пространства.

Будем считать, что S задается в виде графика некоторой аналитической функции $x_3 = \Phi(x_1, x_2)$, определенной в малой окрестности начала координат:

$$S := \{(x_1, x_2) \in V \subset \mathbb{R}^2 : x_3 = \Phi(x_1, x_2), \Phi(x_1, x_2) := u(x_1, x_2)x_1x_2^n\} \quad (2)$$

где: $u(0,0) \neq 0, n \geq 2$. Если $n = 1$, тогда интеграл $\hat{\mu}_q(\xi)$ убывает оптимально для любых q , когда $\det \text{Hess} \Phi(x_1, x_2) \neq 0$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $n \geq 2$. В (2), мы предположим что $u(0,0) = 1, V$ - малая окрестность в начале координат и $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Тогда, для функции $\det \text{Hess} \Phi(x_1, x_2)$, мы получим

$$\det \text{Hess} \Phi(x_1, x_2) = u_1(x_1, x_2)x_2^{2(n-1)},$$

где: $u_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ и $u_1(0,0) = -n^2$.

Таким образом, интегралы (1) имеют следующий вид

$$\hat{\mu}_q(\xi) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 \Phi(x_1, x_2))} |x_2|^{2q(n-1)} a_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (3)$$

где: $a_1(x_1, x_2) = \frac{\psi(x_1, x_2, \Phi(x_1, x_2))|u_1(x_1, x_2)|^q}{\sqrt{(1+|\nabla \Phi(x_1, x_2)|^2)^{4q-1}}}$.

Основным результатом настоящей работы является следующая:

Теорема. Пусть $q > \frac{1}{2}$, тогда существует окрестность нуля V и $C > 0$ такая, что при любой функции $a_1 \in C_0^\infty(V)$, для интеграла (3) справедлива следующая оценка:

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq \frac{C \|a_1\|_{C^3}}{|\xi|}.$$

Схема доказательства основной теоремы

Если $\max\{|\xi_1|, |\xi_2|\} \geq |\xi_3|$, то фаза не имеет критических точек и поэтому справедлива.

Лемма 1. Существует окрестность V начала координат, такая, что для любого $q > 0, \psi \in C_0^\infty(V)$ и $\max\{|\xi_1|, |\xi_2|\} \geq |\xi_3|$ имеет место следующая оценка:

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq \frac{C \|\psi\|_{C^2}}{|\xi|}$$

Лемма 3 является аналогом леммы 1 в работы [3].

Пусть $\max\{|\xi_1|, |\xi_2|\} \leq |\xi_3|$. Тогда, мы записываем интеграл (2) в следующем виде

$$\hat{\mu}_q(\xi) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi_3(s_1x_1 + s_2x_2 + P(x_1, x_2))} |\text{Hess}\Phi(x_1, x_2)|^q a(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (3)$$

где: $s_1 = \frac{\xi_1}{\xi_3}$ и $s_2 = \frac{\xi_2}{\xi_3}$. Случай $\text{rank}(D^2\Phi(0,0)) = 1$ подробно исследован в работе [3]. Более того в этом случае при $q \geq 1$ интеграл (1) оптимально убывает и поэтому мы предположим, что ψ бесконечно гладкая функция с достаточно малым носителем и $\text{rank}(D^2\Phi(0,0)) = 0$. Поэтому в окрестности нуля обе главные кривизны достаточно малы.

Теперь, множество V разложено на две подмножества, т. е:

$$V = A \cup B, \text{ где } A = \{(x_1, x_2) \in V \subset \mathbb{R}^2: |x_2^n| < x_1\} \text{ и } B = V \setminus A.$$

Сначала, мы изучаем интеграл (3) на множестве B .

Предложение 1. Пусть $q > \frac{1}{2}$, тогда существует окрестность $W(W \subset B)$ начала координат и $C > 0$ такое, что для любого $a_1 \in C_0^\infty(W)$ для интеграла (3) справедлива следующее оценка

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq \frac{C|a_1|_{C^3}}{|\xi|}.$$

Теперь, рассмотрим интеграл (3) на множестве A .

Предложение 2. Пусть $q > \frac{1}{2}$, тогда существуют малая окрестность $W_1(W_1 \subset A)$ начала координат и $C > 0$ такие, что интеграл (3) удовлетворяет следующее неравенство при всех функция $a_1 \in C_0^\infty(W_1)$:

$$|\hat{\mu}_q(\xi)| \leq \frac{C|a_1|_{C^3}}{|\xi|}.$$

Список литературы:

1. C.D. Sogge, E.M. Stein Averages of functions over hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$ Invent. Math 82543-5561985.
2. D.M. Oberlin Oscillatory integrals with polynomial phase MATH.SCAND 69. 45-56. 1991.
3. И.А. Икромов, Ш.А. Муранов Об оценках осцилляторных интегралов с множителем гашения Математические заметки 104. 2. 236-251 (2018).

4. Sh.A. Muranov On estimates for oscillatory integrals with damping factor Uzbek Mathematical Journal 4. 112-125.(2018).
5. Arkhipov G.I., Karatsuba A.A. and Chubarikov V.N., Trigonometric integrals. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 43(5), 971-1003 1197 (Russian); English translation in Math. USSR-Izv., 15(1980),pp 21-239.
6. А.С. Садуллаев Критерии алгебраичности аналитических множеств Функц. анализ и его прил 6. 1. 85-86 (1972)
7. И.А. Икромов Демпфированные осцилляторные интегралы и максимальные операторы Математические заметки. 78. 833-852. (2005).
8. А. Эрдеи Асимптотические разложения . М: Физматгиз (1962).
9. М. В. Федорюк Метод перевала Наука. М: (1977).
10. I.A. Ikromov, D. Müller, M. Kempe Damped oscillatory integrals and boundedness of maximal operators associated to mixed homogeneous hypersurfaces Duke Math.J. 126 no.3, 471-490. (2005).

РАЗДЕЛ 3.

ФИЗИКА

3.1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ БЛОХА

Ахмедов Баходир Бахромович

докторант,

*Ферганский государственный университет,
Республика Узбекистан, г. Фергана*

Розиков Джурабек Юлдошбой углы

преподаватель,

*Ферганский государственный университет,
Республика Узбекистан, г. Фергана*

Зокиров Адхам Илхомжон углы

преподаватель,

*Ферганский государственный университет,
Республика Узбекистан, г. Фергана*

Рузибоев Валижон Умарали углы

преподаватель,

*Ферганский государственный университет,
Республика Узбекистан, г. Фергана*

Аннотация. Статья посвящена полупроводникам с низкоразмерными системами, которые активно развиваются и являются относительно новым направлением. Концепция квантовых ям, квантовых нитей и квантовых точек раскрывается в статье. Концепция квантовых состояний важна для технологии активных устройств, например, с помощью этой концепции можно объяснить поведение лазеров на квантовых ямах, фотоприемников, резонансных туннельных диодов и т. д.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, полупроводники с низкоразмерными системами.

В реальных полупроводниковых кристаллах энергетический спектр и волновые функции стационарных состояний электронов часто имеют значительно более сложный вид, чем в «стандартной» модели с параболической зоной. Актуальные для практики полупроводниковые материалы (например, такие как полупроводниковые соединения III-V) характеризуются заметной непараболичностью зоны проводимости, сложной картиной ветвей валентной зоны и необходимостью учета спин-орбитального взаимодействия.

В одноэлектронном приближении спектр собственных значений энергии и волновые функции стационарных состояний в полупроводниковой структуре определяются уравнением Шредингера, учитывающим релятивистские поправки и спин электрона:

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m_0} + V(\vec{r}) + \hat{H}^{rel} \right] |\psi\rangle = E |\psi\rangle \quad (1)$$

В этом уравнении $\vec{p} = -i\hbar\nabla$ - оператор импульса, m_0 - масса электрона в вакууме, $V(\vec{r})$ - потенциальная энергия электрона (в отсутствие внешнего магнитного поля) в электростатическом поле всех ионов и электронов, содержащихся в изучаемой системе, $|\psi\rangle$ - волновая функция в форме двухкомпонентного спинора, включающая спиновую степень свободы электрона, $\hat{H}^{rel}$ - релятивистский вклад в гамильтониан электрона [12]:

$$\hat{H}^{rel} = -\frac{\hat{p}^4}{8m_0^3c^2} + \frac{\hbar^2}{8m_0^2c^2} \Delta V + \frac{\hbar^2}{4m_0^2c^2} \left[\Delta V \times \hat{p} \right] \cdot \vec{\sigma} \quad (2)$$

Здесь $\vec{\sigma}/2$ - оператор спина для величины спина $s = 1/2$ ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ - матрицы Паули), c - скорость света, $\times$ - знак векторного произведения.

Потенциал $V(\vec{r})$ в (1) представляет собой в каждом слое гетероструктуры периодическую функцию координат, отражающую атомное строение кристаллической решетки данного слоя. Так, в случае одиночного резкого гетероперехода с плоскостью интерфейса при $z = 0$, образованного материалами А и В, функция $V(\vec{r})$ имеет вид:

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} V_A(x, y, z), & z < 0 \\ V_B(x, y, z), & z > 0 \end{cases} \quad (3)$$

где: $V_A(x, y, z)$ и $V_B(x, y, z)$ - кристаллические потенциалы в слоях А и В.

Для количественного решения уравнения (1) с потенциалом (3) необходимо применять численные методы, аналогичные методам расчета зонной структуры однородных (объемных) кристаллов. Как правило, в таких расчетах потенциал $V(\vec{r})$ задается в модельной форме, с подгоночными параметрами, значения которых затем уточняются из сравнения теоретических результатов с экспериментальными данными об энергетическом спектре. Если это обстоятельство учесть заранее, то можно ограничиться более простым выражением для оператора $\hat{H}^{rel}$. Так, второе слагаемое из (2) можно включить в потенциал $V(\vec{r})$ уравнения (1) и в дальнейшем не выписывать эту релятивистскую поправку явно. Несущественным оказывается также первое слагаемое в (2) – оно приводит к непараболичности энергетического спектра, которая, как мы далее увидим, возникает и без такого слагаемого в гамильтониане. В результате, включение $\hat{H}^{rel}$ в гамильтониан уравнения (1) фактически сводится к учету только третьего слагаемого из (2), которое называют спин-орбитальным взаимодействием:

$$\hat{H}^{so} \equiv \frac{\hbar}{4m_0^2 c^2} [\nabla V \times \hat{\vec{p}}] \cdot \vec{\sigma} \quad (4)$$

В присутствии оператора $\hat{H}^{so}$ собственные состояния $|\psi\rangle$ гамильтониана (1) в общем случае уже не имеют вида произведения $\psi(\vec{r})|\sigma\rangle$ не зависящих друг от друга орбитальной $\psi(\vec{r})$ и спиновой функций $|\sigma\rangle$, а представляют собой линейные комбинации этих произведений, причем, как мы увидим ниже, вырожденные (без учета $\hat{H}^{so}$ уровни энергии E испытывают так называемое спин-орбитальное расщепление. В ряде полупроводниковых материалов спин-орбитальное расщепление зон сравнимо по масштабу с шириной запрещенной зоны, так что член $\hat{H}^{so}$ в уравнении Шредингера оказывается актуальным.

Состояния частиц в гетероструктурах с учетом поля кристаллической решетки естественно искать в форме линейных комбинаций волн Блоха - частных решений уравнения (1) с потенциалом $V(\vec{r})$,

обладающим полной симметрией однородного кристалла. Вспомним, как определяются эти частные решения.

При наличии трансляционной симметрии кристаллического потенциала $V(\vec{r})$ искомые частные решения могут быть выбраны как состояния $|\psi_{\vec{k}}\rangle$, собственные для операторов трансляций $\hat{T}(\vec{R})$ на векторы $\vec{R}$ решетки Браве $\hat{T}(\vec{R})|\psi_{\vec{k}}\rangle = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}}|\psi_{\vec{k}}\rangle$.

Действие оператора трансляции заключается в замене аргумента волновой функции $\vec{r}$ на $\vec{r} - \vec{R}$. Такое решение имеет вид

$$|\psi_{\vec{k}}\rangle = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}|u_{\vec{k}}\rangle \quad (5)$$

где: функция $|u_{\vec{k}}\rangle$ не изменяется при замене $\vec{r}$ на $\vec{r} - \vec{R}$, то есть она является периодической функцией координат $\vec{r}$ с периодами $\vec{R}$. В этом случае выражение (5) называют волной Блоха или Блоховской волновой функцией, а присутствующий в нем множитель $|u_{\vec{k}}\rangle$ - Блоховской амплитудой.

С учетом спина электрона Блоховскую амплитуду $|u_{\vec{k}}\rangle$ следует рассматривать как двухкомпонентный спинор, который может быть представлен линейной комбинацией двух базисных спиноров $|\sigma\rangle$. Если в качестве базисных спиноров $|\sigma\rangle$ взять спинорные состояния электрона с определенными значениями проекции спина на ось z, $|\uparrow\rangle \equiv |s_z = 1/2\rangle$, $|\downarrow\rangle \equiv |s_z = -1/2\rangle$ то Блоховская амплитуда в общем случае запишется в виде

$$|u_{\vec{k}}\rangle = u_{\vec{k}\uparrow}(\vec{r})|\uparrow\rangle + u_{\vec{k}\downarrow}(\vec{r})|\downarrow\rangle \quad (6)$$

где: $u_{\vec{k}\uparrow}(\vec{r})$ и $u_{\vec{k}\downarrow}(\vec{r})$ - обычные (однокомпонентные) периодические функции координат.

Действуя оператором импульса на функцию, Блоха (5), получим

$$\begin{aligned} \hat{p}|\psi_{\vec{k}}\rangle &= e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\hat{p}|u_{\vec{k}}\rangle + \hbar\vec{k}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}|u_{\vec{k}}\rangle, \\ \hat{p}^2|\psi_{\vec{k}}\rangle &= e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\hat{p}^2|u_{\vec{k}}\rangle + 2e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\hbar\vec{k}\cdot\hat{p}|u_{\vec{k}}\rangle + \hbar^2\vec{k}^2e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}|u_{\vec{k}}\rangle. \end{aligned}$$

Учтем эти равенства, выполняя подстановку выражения (5) в уравнение Шредингера (1) с оператором $\hat{H}^{so}$ в качестве $\hat{H}^{rel}$. Разделив левую и правую стороны получившегося равенства на $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, имеем следующее уравнение для блоховской амплитуды

$$\hat{H}(\vec{k})|u_{\vec{k}}\rangle = E|u_{\vec{k}}\rangle \quad (7)$$

где

$$\hat{H}(\vec{k}) = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m_0} + V(\vec{r}) + \hat{H}^{so} + \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m_0} + \frac{\hbar}{m_0} \vec{k} \cdot \hat{\vec{p}} + \frac{\hbar}{4m_0^2 c^2} [\nabla V \times \hbar \vec{k}] \cdot \vec{\sigma} \quad (8)$$

Обозначим для краткости:

$$\hat{\pi} = \hat{\vec{p}} + \frac{\hbar}{4m_0 c^2} [\vec{\sigma} \times \nabla V] \quad (9)$$

$$\hat{H}(0) = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m_0} + V(\vec{r}) + \hat{H}^{so} \quad (10, a)$$

Тогда гамильтониан (8) запишется в виде:

$$\hat{H}(\vec{k}) = \hat{H}(0) + \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m_0} + \frac{\hbar}{m_0} \vec{k} \cdot \hat{\pi} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} \quad (10, б)$$

При любом заданном волновом векторе $\vec{k}$ уравнение (7) представляет собой задачу на собственные значения $E(\vec{k})$ и собственные векторы $|u_{\vec{k}}\rangle$ оператора $\hat{H}(\vec{k})$ (10). Пронумеруем индексом n линейно независимые решения $|u_{n\vec{k}}\rangle$ и соответствующие им собственные значения энергии $E_n(\vec{k})$. Таким образом, приходим к хорошо известному в физике твердого тела результату: энергетический спектр электрона в периодическом поле решетки складывается из множества зон $E_n(\vec{k})$, где n имеет смысл номера зоны.

Список литературы:

1. R. Chris Bowen, Gerhard Klimeck, Roger K. Lake, William R. Frensley, Ted Moise, Quantitative Simulation of a resonant tunneling diode, J.Appl . Phys 81(7) (1997)
2. Peter Y.Yu., Manuel Cardona. Fundamentals of semiconductors/ Springer, 1995. – 317 pp.

НАУЧНЫЙ ФОРУМ: ТЕХНИЧЕСКИЕ И ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

*Сборник статей по материалам XXXII международной
научно-практической конференции*

№ 3 (32)
Апрель 2020 г.

В авторской редакции

Подписано в печать 13.04.20. Формат бумаги 60х84/16.
Бумага офсет №1. Гарнитура Times. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 1,625. Тираж 550 экз.

Издательство «МЦНО»
123098, г. Москва, ул. Маршала Василевского, дом 5, корпус 1, к. 74
E-mail: tech@nauchforum.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного
оригинал-макета в типографии «Allprint»
630004, г. Новосибирск, Вокзальная магистраль, 3

16+



НАУЧНЫЙ
ФОРУМ
nauchforum.ru